Elément de correction du TD 7 Math-Info

Année 2001-2002

1 Exercice-1

i). Montrer que si L est algébrique et si R est rationnel le langage $L \cap R$ est algébrique.
ii). Donner deux langages algébriques dont l'intersection n'est pas algébrique.

Correction :
i). Montrons que si L est algébrique et R rationnel, alors $L \cap R$ est algébrique. Pour cela, on prend un automate à pile qui reconnaît L par état final, on le note $M = (Q_M, \Sigma, \Gamma, q_0, \gamma_0, \delta_M, F_M)$. On prend aussi un automate fini $A = (Q_A, \Sigma, p_0, \delta_A, F_A)$ qui reconnaît R rationnel. L'automate à pile suivant va reconnaître $L \cap R$ par état final :
$M'' = (Q_A \times Q_M, \Sigma, \Gamma, (p_0, q_0), \gamma_0, \delta, F_A \times Q_F)$,
et la fonction de transition :
$\delta((p, q), a, \alpha) = \bigcup\{((p', q'), a), p' \in \delta_A(p, a), q' \in \delta_M(q, a, \alpha)\}$.

ii). Si on prend $L = \{a^n b^m c^m\}$ et $L' = \{a^m b^n c^n\}$ alors $L \cap L' = \{a^n b^n c^n\}$ qui n'est pas un langage algébrique.

---

2 Exercice-2

Montrer que le langage $L = \{ww, w \in \{a, b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. On donnera un automate à pile.

Correction :
Montrons que L n'est pas algébrique. Soit $L' = \{a^n b^p a^n b^p\}$. Alors $L' = L \cap a^+b^+a^+b^+$ avec $a^+b^+a^+b^+$ rationnel. D'après l'exercice précédent, il est suffisant de montrer que L' n'est pas algébrique. En effet, l'intersection d'un langage rationnel avec un langage algébrique est algébrique.

On utilise le lemme de l'étoile pour les langages algébriques en considérant le mot $a^K b^K a^K b^K$, K étant la constante du lemme de l'étoile pour le langage L'. En pompant, dans tous les cas on sort du langage. Donc L' n'est pas algébrique et L non plus.

Montrons que le complémentaire de L est algébrique. Il suffit de créer un automate à pile non-déterministe qui reconnaît le langage $\bar{L}$.

On traite les 2 cas suivants : si le mot est de taille impaire, il est forcément dans le langage. Sinon i.e. s'il est de taille $2n$, il existe un entier i tel que les lettres i et $n+i$ diffèrent. Alors, on empile $i-1$ lettres, on se met dans un état q_a ou q_b selon que l'on a lu a ou b, ensuite on dépile $i-1$ lettres. Ensuite, on empile $n-i$ lettres, on n'effectue pas la transition si on lit b alors qu'on a l'information que la $i-$ème lettre était un a. Par contre, si on lit a, on effectue la transition et on dépile ensuite $n-i$ caractères pour se trouver en pile vide. Par le non-déterminisme de l'automate, on trouvera le premier i pour lequel le mot de L diffère en i et $n+i$, dans les autres cas, on sera bloqué. On en déduit les transitions :

Cas impair :
$\delta(q_0, \alpha, \gamma_0) = (q_i, \gamma_0)$,
$\delta(q_i, \alpha, \gamma_0) = (q_i, \alpha\gamma_0)$,
$\delta(q_i, n\alpha, \beta) = (q_i, \epsilon)$, (s'il existe un caractère dans la pile on dépile).
$\delta(q_i, \epsilon, \gamma_0) = (q_i, \epsilon)$.
Cas pair :
$\delta(q_0, \alpha, \gamma_0) = (q_p, \alpha\gamma_0)$
$\delta(q_p\alpha, \beta) = (q_p, \alpha\beta)$
$\delta(q_p, a, \beta, q_a, \beta) = (q_a, \beta)$ et son symétrique pour b.
$\delta(q_a, \alpha, \beta) = (q_a, \epsilon)$ et son symétrique pour b.
$\delta(q_a, \alpha, \gamma_0) = (q'_a, \alpha\gamma_0)$ et son symétrique pour b.
$\delta(q'_a, \alpha, \beta) = (q'_a, \alpha\beta)$ et son symétrique pour b.
$\delta(q'_a, a, -) =$ rien (on veut bloque ici) et son symétrique pour b.
$\delta(q'_a, b\beta) = (q_d, \beta)$ et son symétrique pour b.
$\delta(q_d, \alpha, \beta) = (q_d, \epsilon)$.
$\delta(q_d, \epsilon, \gamma_0) = (q_d, \epsilon)$.
(on empile puis dépile jusqu ;à q_a, on rempile à l'aide de q'_a et on redépile à l'aide de q_d.

Ainsi, si le mot est dans $\bar{L}$, il existe un i tels que les lettres i et $n-i$ diffèrent et il existe alors un chemin "victorieux" dans l'automate. La réciproque se fait de même.

---

3 Exercice-3

On appelle $\frac{1}{2}\ L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* | xy \in L, |x| = |y|\}$, L étant un langage sur Σ.
i). Montrer que le langage $L = \{a^n b^n c^m d^{3m}, n, m \geq 1\}$ est algébrique.
ii). Calculer $\frac{1}{2}\ L$.
iii). Montrer que $\frac{1}{2}\ L$ n'est pas algébrique.

Correction :
i). L'automate à pile suivant reconnait le langage L (par pile vide) :
$\delta(q_0, a, \gamma_0) = (q_0, a\gamma_0)$,
$\delta(q_0, a, a) = (q_0, aa)$,
$\delta(q_0, b, a) = (q_0, \epsilon)$,
$\delta(q_0, c, \gamma_0) = (q_0, ccc)$,
$\delta(q_0, c, c) = (q_0, cccc)$,
$\delta(q_0, d, c) = (q_0, \epsilon)$.
ii). $\frac{1}{2}\ L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ avec :
$L_1 = \{a^n b^i, i \leq n$ et i paire $\}$,
$L_2 = \{a^n b^n c^i, i \leq n$ et $n+i$ pair$\}$,
$L_3 = \{a^n b^n c^m d^i, n+i = m\}$.
iii). On utilise le lemme de l'étoile sur le mot $a^K b^K c^K$ avec K l'entier du lemme.

---

4 Exercice-4

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques :

- ☞ $L_1 = \{a^i b^j c^k, i < j < k\}$;
- ☞ $L_2 = \{a^i b^j, j = i^2\}$;
- ☞ $L_3 = \{a^i, i \text{ premier }\}$;
- ☞ $L_4 = \{a^n b^n c^m, n \leq m \leq 2n\}$;
- ☞ $L_5 = \{a^{n^2}, n \geq 0\}$.

Correction :

- ☞ L_1 : en prenant la constante du lemme, on considère $a^K b^{K+1} c^{K+1}$. Alors la condition $|vxy| \leq K$ implique que v et x ne peuvent contenir simultanément des a et des c. Alors on regarde les cas :
  - ➾ si v ou x contient deux lettres différentes, en pompant avec $n = 2$ on n'est plus dans L car on obtient une alternance de ces 2 lettres.
  - ➾ si vx ne contient que des a, en pompant avec $n = 2$ on sort du langage.
  - ➾ si vx ne contient que des b, idem.
  - ➾ si vx ne contient que des c, en pompant avec $n = 0$ on sort du langage.
  - ➾ si v ne contient que des a et x que des b, on pompe avec $n = 2$ et on sort du langage.
  - ➾ si v ne contient que des b et x que des c, on pompe avec $n = 0$ et on sort du langage.

  Donc le langage L_1 n'est pas algébrique.
- ☞ L_2 : On considère le mot $a^K b^{K^2}$. On se ramène ay cas où v ne contient que des a, alors en pompant on obtient des mots de la forme $a^{K+i} b^{K^2+j}$ avec $i \geq 1$, $1 \leq j \leq K$, ce qui est impossible à cause des carrés.
- ☞ L_3 : utiliser le même type de preuve que celle pour montrer que ce langage n'est pas rationnel.
- ☞ L_4 : On utilise le lemme de l'étoile avec le mot $a^K b^K c^K$
- ☞ L_5 : la preuve est similaire à celle de L_2.
