Elément de correction du TD 4 Math-Info

Année 2001-2002

1 Exercice-1

Montrer que les deux automates finis suivants reconnaissent le même langage.
Etat initial : 0, état terminal : 1

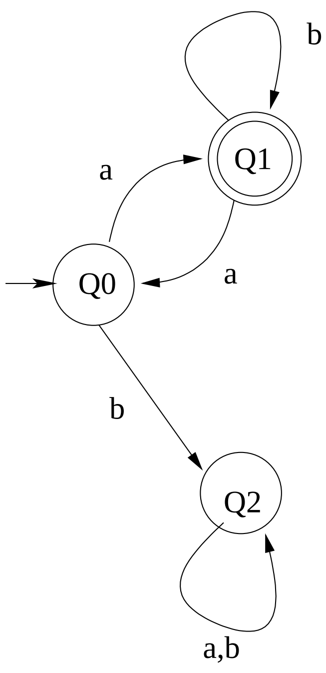
δ	0	1	2	3
a	1	2	1	3
b	3	1	3	3

Etat initial : 0, états terminaux : 1,3,4

δ	0	1	2	3	4	5
a	1	2	3	2	2	5
b	5	4	5	3	4	5

Correction :

Pour chacun des deux automates M_1 et M_2, on cherche leur automate minimal et on voit qu'ils sont équivalents :



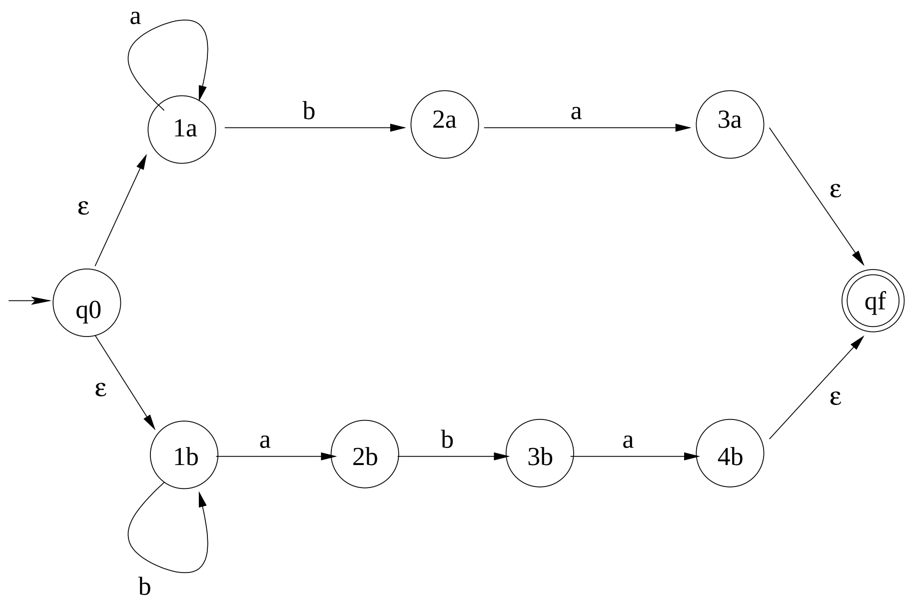
Avec pour $M_1 : Q_0 = \{0, 2\}$, $Q_1 = \{1\}$ et $Q_2 = \{3\}$. et pour $M_2 : Q_0 = \{0, 2\}$, $Q_1 = \{1, 3, 4\}$ et $Q_2 = \{5\}$.

---

2 Exercice-2

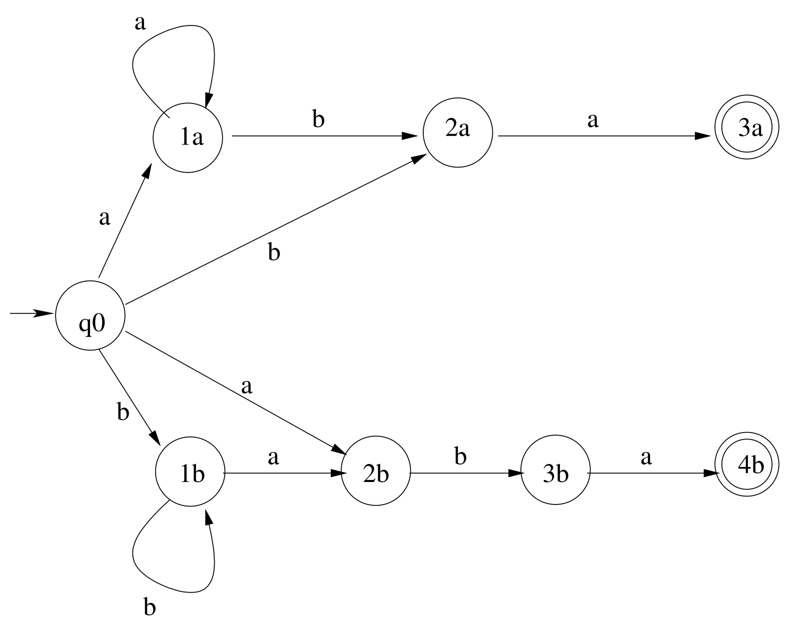
i). Donner un automate non déterministe pour le langage $L = \{a^n ba | n \geq 0\} \cup \{b^n aba | n \geq 0\}$.
ii). Déterminiser, puis minimiser l'automate obtenu.

Correction : i). La première étape consiste à construire deux automates déterministes correspondants respectivement aux langages $\{a^n ba | n \geq 0\}$ et $\{b^n aba | n \geq 0\}$ et de les réunir en ajoutant des $\epsilon - transitions$.

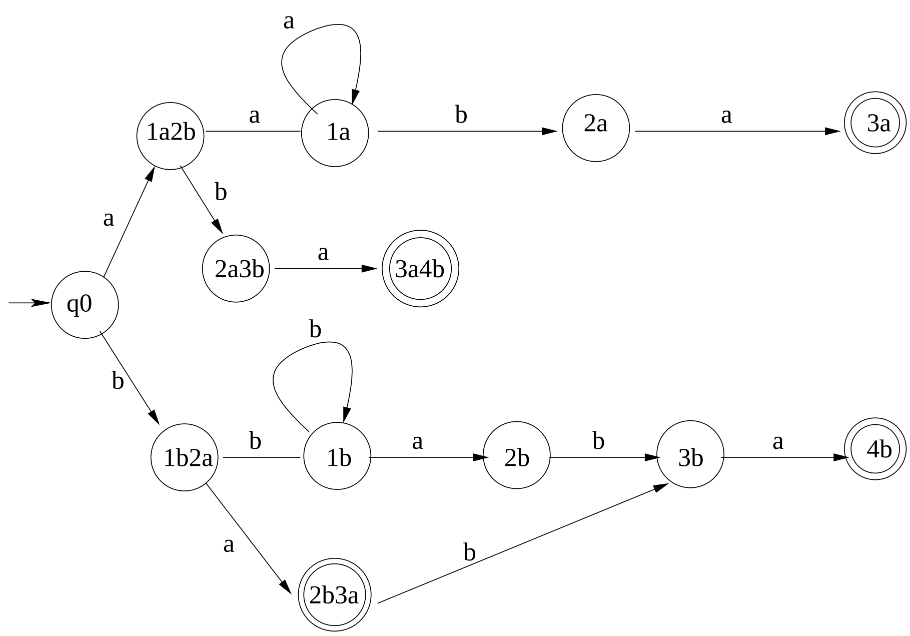


ii). On supprime d'abord les $\epsilon - transition$ en appliquant l'algorithme vu en cours.
On applique ensuite l'algorithme de déterminisation.

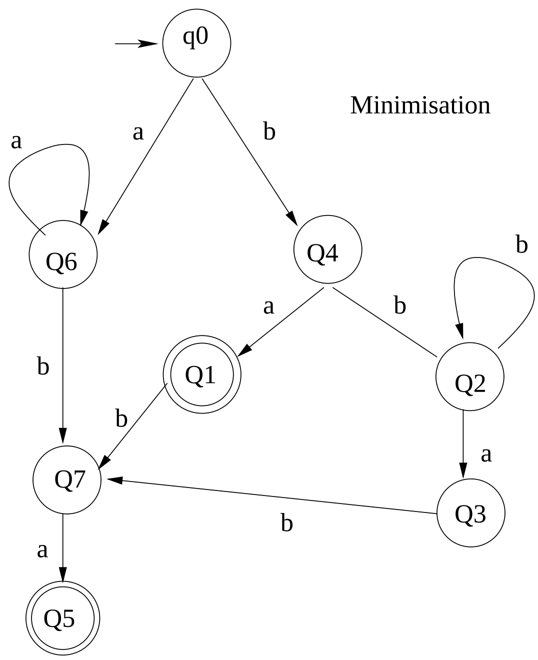
Suppression des epsilon−transitions



Determinisation



Enfin, on minimise l'automate :



3 Exercice-3

Donner l'automate fini déterministe minimal pour chacun des langages suivants :

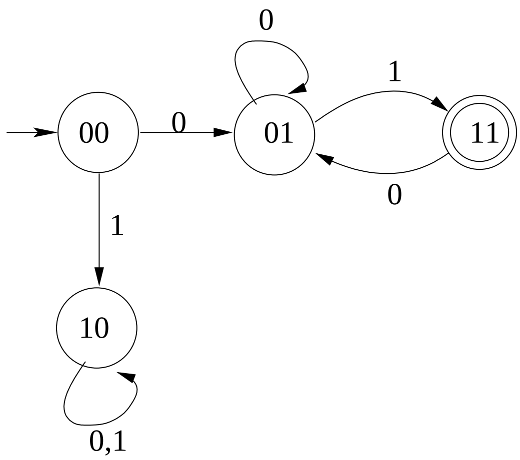
☞ $L_1 = \{0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}...0^{n_k}1^{m_k}, k \geq 0, \forall i, 1 \leq i \leq k, n_i, m_i > 0\}$

☞ L_2, l'ensemble des mots de $\{0, 1\}^*$ se terminant par 101 ou 0010 ;

☞ $L_3 = (00 + 1)^*(11 + 0)^*$

Correction :

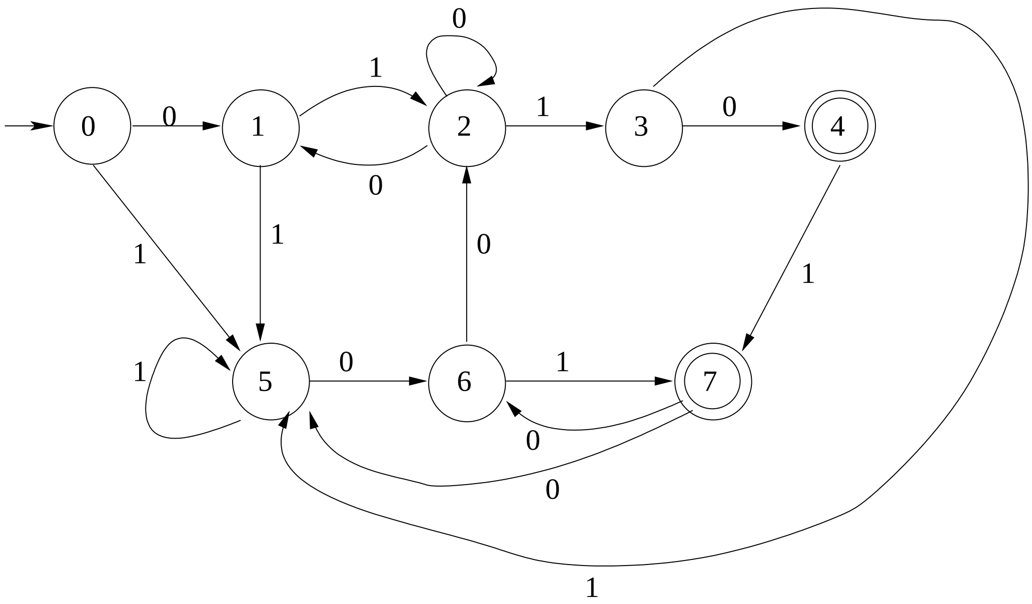
Pour L_1 : on obtient l'automate suivant, et si on essaie de le minimiser, on tombe sur un automate à 4 états. Il est donc minimal.

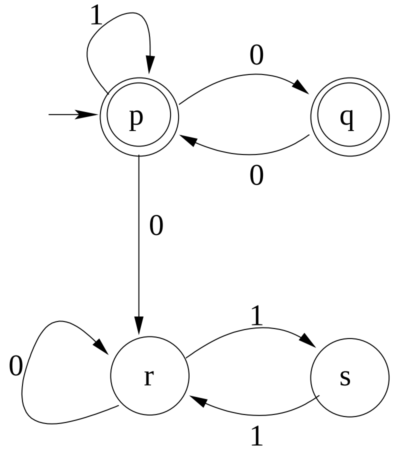


Pour L_2 : on écrit l'automate non déterministe qui réalise un ou des automates qui reconnaissent les mots finissant par 101 et 0010. Ensuite on déterminise et on obtient l'automate suivant. Si on essaie de minimiser, tous les états sont séparés, donc l'automate est minimal.

Pour L_3 : On obtient l'automate non déterministe suivant :

On nomtre que cet automate correspond bien à un automate voulu :


0
1
2
3
4
5
6
7
0
1
0
1
1
0
1
0
1
1
1
0
0
0
1


p
q
r
s
1
0
0
0
0
1
1

$\Rightarrow$: Si $u \in L$, on écrit $u = v01w$ où $v0$ est le plus petit préfixe de u contenant un nombre impair de 0 :

☞ Si cette décomposition n'existe pas, c'est que ou bien $u = v0$, on lit avec les états p et q, et le dernier 0 nous ramène dans l'état r, ou bien $u \in (00+1)^*$, on reconnaît le mot avec les états p et q.

☞ Si elle existe, on lit v avec les états p et q, avec le 0 on passe à l'état r, puis on lit $1w$ avec r et s.

$\Leftarrow$: Soit $u \in L(A)$.

☞ Si la lecture de u se termine dans l'état p, c'est que $u \in (00+1)^* \subseteq L$.

☞ Si la lecture de u se termine dans l'état r, c'est que u s'écrit $v0w$ avec $v \in (00+1)^*$ et $w \in (11+0)^*$ (donc $0w \in (11+0)^*$ aussi), et finalement $u \in L$.

---

4 Exercice-4

On donne l'automate fini $A = (\{a, b\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, q_0 = \{1\}, q_f = \{5\}, \delta)$

δ	1	2	3	4	5
a	2	2		$3-5$	
b		1	5	2	
ϵ	$4-5$		2		4

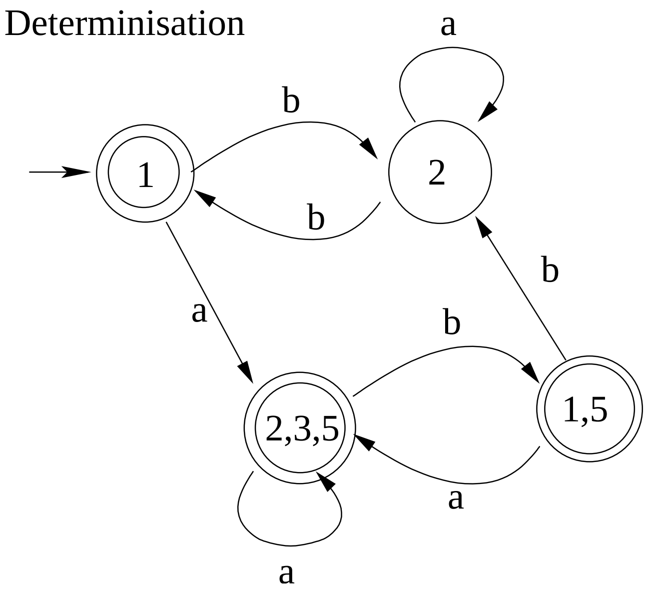
i). Déterminiser A
ii). Minimiser A
iii). Donner une grammaire régulière engendrant A

Correction :
i). On va d'abord supprimer les $\epsilon-$transitions :
On applique l'algorithme vu en cours qui consiste d'abord à calculer la clôture pour chacun des états de l'automate A :
$cl_\epsilon(1) = \{1, 4, 5\}$
$cl_\epsilon(2) = \{2\}$
$cl_\epsilon(3) = \{2, 3\}$
$cl_\epsilon(4) = \{4\}$
$cl_\epsilon(5) = \{4, 5\}$
On calcule alors la nouvelle fonction de transition δ' :

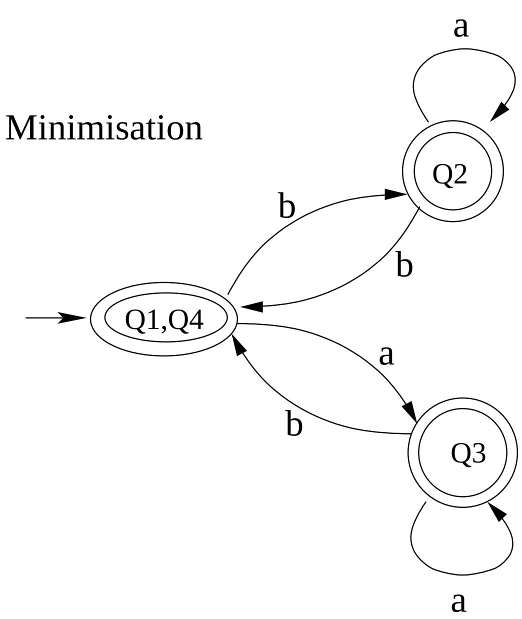
δ	1	2	3	4	5
a	$2-3-5$	2	2	$3-5$	$3-5$
b	2	1	$1-5$	2	

$A' = \{1, 5\}$.
Puis, on déterminise l'automate précédent en appliquant l'algorithme du cours :
$T_0 = \emptyset$
$Q_0 = I = \{1\}$
$T_1(\{1\}, a) = \{2, 3, 5\}$; $T_1(\{1\}, b) = \{2\}$

$Q_1 = Q_0 \cup \{2\} \cup \{2,3,5\}$
$T_2(\{2,3,5\}, a) = \{2,3,5\}$; $T_2(\{2,3,5\}, b) = \{1,5\}$
$Q_2 = Q_1 \cup \{1,5\}$
$T_3(\{1,5\}, a) = \{2,3,5\}$; $T_3(\{1,5\}, b) = \{2\}$
$Q_3 = Q_2$
L'automate déterminisé est :



ii) On minimise l'automate en appliquant l'algorithme vu en cours :
On pose (pour simplifier la notation) :
$Q_1 = \{1\}, Q_2 = \{2\}, Q_3 = \{2,3,5\}, Q_4 = \{1,5\}$
On part de $\Pi_0 = (A, Q$
$A) = (\{Q_1, Q_3, Q_4\}, \{Q_2\})$
$\Pi_1 = (\{Q_1, Q_4\}, \{Q_3\}, \{Q_2\})$
$\Pi_2 = \Pi_1$
L'automate minimal est :



iii). $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$
avec $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$: l'alphabet non-terminal où $q_1 = \{Q_1, Q_4\}$, $q_2 = \{Q_2\}$, $q_3 = \{Q_3\}$.
$\Sigma = \{a, b\}$: l'alphabet terminal
$q_0 = \{q_1\}$: la source ou l'axiome
P : l'ensemble des productions

$$
\begin{aligned}
&q_1 \rightarrow aT(q_1, a) = aq_3 | bT(q_1, b) = bq_2 | \epsilon \\
&q_2 \rightarrow aT(q_2, a) = aq_2 | bT(q_2, b) = bq_1 \\
&q_3 \rightarrow aT(q_3, a) = aq_3 | bT(q_3, b) = bq_1 | \epsilon
\end{aligned}
$$
